EQUATIONS ET INEQUATIONS

1°) équations du premier degré à une inconnue.

Résoudre une équation, c'est trouver toutes les solutions possibles.
Un nombre est solution d'une équation s'il rend l'expression numérique VRAIE.
La lettre présente dans l'équation s'appelle l'inconnue, on dit qu'elle est de degré 1 car elle n'a pas d'exposant.

Exemple : on considère l'équation $5x + 2 = 3x - 8$

(-5) est solution de l'équation car :

$$\left.\begin{array}{l}\text{Membre de gauche : } 5 \cdot (-5) + 2 = -23 \\ \text{Membre de droite : } 3 \cdot (-5) - 8 = -23\end{array}\right\} \text{ donc l'égalité est vraie pour } x = -5$$

Pour résoudre une équation, je dois :

- Passer tous les termes qui ont un « x » d'un côté, et tous les termes qui n'en ont pas de l'autre côté.

$$5x + 2 = 3x - 8$$

$$5x - 3x = -8 - 2$$

- Réduire.

$$2x = -10$$

- Isoler l'inconnue.

$$x = -\frac{10}{2} = -5$$

- Conclure.

L'équation admet une solution : $x = -5$.

Important : certaines équations comportent des fractions, des nombres négatifs, des puissances… il faut TOUJOURS bien faire attention à respecter les règles de calcul.

Exemples :

$$\frac{x}{3} = \frac{x}{4} - \frac{6}{5}$$

$$\frac{x \times 4}{3 \times 4} - \frac{x \times 3}{4 \times 3} = -\frac{6}{5}$$

$$\frac{4x - 3x}{12} = -\frac{6}{5}$$

$$\frac{x}{12} = -\frac{6}{5}$$

$$x = -\frac{6}{5} \times 12$$

$$\boxed{x = -\frac{72}{5}}$$

$$\frac{5x}{8} - \frac{3}{10} = \frac{7x}{40}$$

$$\frac{5x \times 5}{8 \times 5} - \frac{7x}{40} = \frac{3}{10}$$

$$\frac{25x - 7x}{40} = \frac{3}{10}$$

$$\frac{18x}{40} = \frac{3}{10}$$

$$x = \frac{3}{10} \times \frac{40}{18}$$

$$x = \frac{3 \times 10 \times 2 \times 2}{10 \times 3 \times 3 \times 2}$$

$$\boxed{x = \frac{2}{3}}$$

$$\frac{3}{5}x - \frac{1}{9} = \frac{3 \div 3}{9 \div 3}x + \frac{4}{5}$$

$$\frac{3 \times 3}{5 \times 3}x - \frac{1 \times 5}{3 \times 5}x = \frac{1 \times 5}{9 \times 5} + \frac{4 \times 9}{5 \times 9}$$

$$\frac{9x - 5x}{15} \times 15 = \frac{5 + 36}{45} \times 15$$

$$\frac{4x}{15} \times 15 = \frac{41}{3 \times 15} \times 15$$

$$4x = \frac{41}{3}$$

$$x = \frac{41}{3} \times \frac{1}{4}$$

$$\boxed{x = \frac{41}{12}}$$

Remarque : une équation du premier degré à une inconnue peut avoir :

- Une solution, cas le plus fréquent)
- Aucune solution, cas de $2(x + 3) - 2x = 1$ qui donne, après résolution : $0 = -5$ ce qui est IMPOSSIBLE
- Une infinité de solutions, cas de $4(2x + 1) - 2 = 8x + 2$ qui donne, après résolution, $0 = 0$ ce qui est TOUJOURS VRAI

2°) Résolution d'un problème concret.

Exemple : Johann aura le double de l'âge de son fils dans cinq ans. Aujourd'hui la somme de leur âge fait 56 ans. Quel âge a Johann ? Quel âge a son fils ?

étape 1 : choix de l'inconnue.

L'inconnue est parfois imposée par le problème. Lorsque ce n'est pas le cas, il faut définir l'inconnue. J'essaie d'être stratégique dans mon choix.

Ici, je peux choisir l'âge de Johann ou celui de son fils. D'après les données, si je choisis l'âge de Johann, j'aurai des fractions dans mon équation. Je vais donc choisir l'âge de son fils.

J'appelle x l'âge du fils de Johann aujourd'hui.

étape 2 : traduction de l'énoncé et mise en équation.

Cette étape est délicate et nécessite beaucoup de réflexion.

Le double de l'âge de son fils aujourd'hui : $2x$
Le double de l'âge de son fils dans 5 ans : $2(x+5)$
Age de Johann aujourd'hui : $2(x+5)-5$
Somme de l'âge de Johann et de celui de son fils aujourd'hui : $2(x+5)-5+x$

Mise en équation : $2(x+5)-5+x=56$

étape 3 : résolution de l'équation

$$2(x+5)-5+x=56$$
$$2x+10-5+x=56$$
$$3x+5=56$$
$$3x=56-5=51$$
$$x=\frac{51}{3}=17$$

La solution de l'équation est $x=17$

étape 4 : je vérifie ma solution
si aujourd'hui le fils a 17 ans, alors dans 5 ans il aura 17+5=22 ans et son père aura donc 22x2=44 ans, donc aujourd'hui, Johann a 44–5=39 ans et 39+17=56 ans.

étape 5 : je réponds au problème
Aujourd'hui, Johann a 39 ans et son fils a 17 ans.

3°) Equation produit nul.

Une équation produit nul est de la forme, par exemple : $(x-3)(2x+5)=0$.

Pour résoudre une telle équation, on utilise la propriété suivante :

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul.

Voici deux exemples traités :

$2(x-3)(2x+5)=0$
$x-3=0$ ou $2x+5=0$
$x=3$ $\quad x=-\frac{5}{2}$
L'équation admet deux solutions : 3 et $-\frac{5}{2}$

Vérification :
Si $x=3$ alors le facteur $x-3$ est nul donc le produit est nul.
Si $x=-\frac{5}{2}$ alors le facteur $2x+5$ est nul donc le produit est nul.

Remarque : on ne s'est pas inquiétés du facteur 2 car il ne dépend pas de x. Il n'aura donc aucune influence sur les solutions.

$x(x+4)(x-3)=0$
$x=0$ ou $x+4=0$ ou $x-3=0$
$x=0$ $\quad x=-4$ $\quad x=3$
L'équation admet trois solutions : -4 ; 0 ; 3.

Vérification :
Si $x=0$ alors le produit est nul.
Si $x=-4$ alors le facteur $x+4$ est nul donc le produit est nul.
Si $x=3$ alors le facteur $x-3$ est nul donc le produit est nul.

Remarque : ici le facteur x doit absolument faire partie des solutions. Contrairement à l'exemple précédent, il a une influence sur les solutions.

Utilisation de la factorisation pour transformer une équation du second degré en équation produit nul :

Je dois me rappeler que je ne sais pas résoudre une équation du second degré. Lorsque j'en ai une, je passe tout du même côté, et je cherche à factoriser.

Remarques :

Les équations de type $x^2=0$ n'admettent qu'une solution : $x=0$. On conviendra que si le carré d'un nombre est nul, alors ce nombre est nul.

Les équations de type $x^2=-A$, avec $A\in\mathbb{R}^+$, n'admettent aucune solution réelle. On conviendra que le carré d'un nombre réel n'est jamais nul.

- Equations de type 3è identité remarquable

$$x^2 = 16$$

$$x^2 - 16 = 0$$

$(x-4)(x+4) = 0$

$x - 4 = 0$ ou $x + 4 = 0$

$x = 4$ ou $x = -4$

L'équation admet deux solutions : 4 et -4.

- Equations de type 1è ou 2è identité remarquable

Méthode 1 :

$$4x^2 - 12x + 9 = 0$$
$$(2x-3)^2 = 0$$
$$(2x-3)(2x-3) = 0$$

j'ai deux fois le même facteur.

$$2x - 3 = 0$$
$$x = \frac{3}{2}$$

L'équation admet une unique solution : $\frac{3}{2}$.

Méthode 2 :

$$49x^2 = -1 - 14x$$
$$49x^2 + 14x + 1 = 0$$
$$(7x+1)^2 = 0$$

si le carré d'un nombre est nul, alors ce nombre est nul.

$$7x + 1 = 0$$
$$x = -\frac{1}{7}$$

L'équation admet une seule solution : $-\frac{1}{7}$

- Cas où on a une grande expression

$(E):\ (3x-5)(x+1) - 2(x+1)(4-x) = 0$ je factorise mon expression à l'aide du facteur commun $(x+1)$

$(E):\ (x+1)[(3x-5) - 2(4-x)] = 0$ je développe et réduis à l'intérieur des crochets

$(E):\ (x+1)(3x - 5 - 8 + 2x) = 0$

$(E):\ (x+1)(5x-13) = 0$ équation produit nul

$x + 1 = 0$ ou $5x - 13 = 0$

$x = -1$ $x = \frac{13}{5}$

L'équation (E) admet deux solutions : -1 et $\frac{13}{5}$.

4°) Inéquations

Une inéquation est une expression numérique qui contient l'un des symboles suivants :

$<$ strictement inférieur
$\leq$ inférieur ou égal
$>$ strictement supérieur
$\geq$ supérieur ou égal

Une inéquation admet une infinité de solutions, en général.
Pour résoudre une inéquation il faut l'exprimer avec l'inconnue à gauche et un nombre à droite. Il faut donc réaliser des manipulations algébriques. Il y a quatre cas possibles :
$x < k$ ce qui signifie : tous les nombres qui sont strictement inférieurs à k sont solution
$x \leq k$ ce qui signifie : tous les nombres qui sont inférieurs ou égaux à k sont solution
$x > k$ ce qui signifie : tous les nombres qui sont strictement supérieurs à k sont solution
$x \geq k$ ce qui signifie : tous les nombres qui sont supérieurs ou égaux à k sont solution

Voici un rappel des règles de calcul :

- On peut ajouter ou soustraire un même nombre aux deux membres d'une inéquation sans en changer le sens.
- On peut multiplier ou diviser par un même nombre positif les deux membres d'une inéquation sans en changer le sens.
- Si on multiplie ou divise par un même nombre **négatif** les deux membres d'une inéquation, alors il faut **inverser le sens**.
- Si on change de place les deux membres d'une inéquation, alors on doit inverser le sens de l'inéquation.

Exemple : comment changer les membres de place

$3 < x$ donne $x > 3$	$5 \leq 3 + 2x$ donne $2x + 3 \geq 5$	$7 > 4 - x$ donne $4 - x < 7$	$-\frac{2}{3} \geq x$ donne $x \leq -\frac{2}{3}$

Exemple : comment opposer tous les signes d'une inégalité

$-x < 5$ donne $x > -5$	$4 \leq -2x$ donne $-4 \geq 2x$	$-7 > -x$ donne $7 < x$	$-x \geq -5$ donne $x \leq 5$

Exemple : comment ajouter ou soustraire un même nombre aux deux membres d'une inéquation

$x + 7 < -8$ $x + 7 - 7 < -8 - 7$ $\boxed{x < -15}$	$\frac{11}{3} \geq \frac{2}{3} - x$ $\frac{2}{3} - x \leq \frac{11}{3}$ $-\frac{2}{3} + x \geq -\frac{11}{3}$ $-\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + x \geq -\frac{11}{3} + \frac{2}{3}$ $x \geq -\frac{9}{3}$ $\boxed{x \geq -3}$

J'ai changé les membres de place

J'ai inversé tous les signes pour avoir le x positif

J'ai ajouté $\frac{2}{3}$

Exemple : comment multiplier ou diviser les deux membres d'une inéquation par un nombre positif :

$3x < 15$ $\frac{3x}{3} < \frac{15}{3}$ $\boxed{x < 5}$	$\frac{2}{3}x \geq 4$ $\frac{2}{3} \times \frac{3}{2} \times x \geq 4 \times \frac{3}{2}$ $\boxed{x \geq 6}$

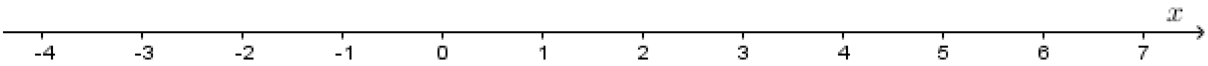
Exemple : comment multiplier ou diviser les deux membres d'une inéquation par un nombre négatif :

$-3x < 15$ $\frac{-3x}{-3} > \frac{15}{-3}$ $\boxed{x > -5}$	$\frac{-2}{3}x \geq 4$ $\frac{-2}{3} \times \frac{3}{-2} \times x \leq 4 \times \frac{3}{-2}$ $\boxed{x \leq -6}$

Il faut changer le sens de l'inéquation au moment où on écrit la multiplication ou division par un nombre négatif

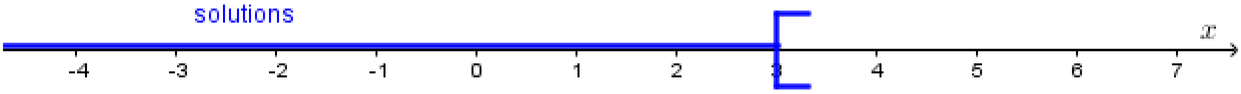
Représentation graphique des solutions d'une inéquation

L'inéquation $x < 3$ signifie que tous les nombres qui sont strictement inférieurs à 3 sont solutions.
Pour représenter ces solutions, on commence par tracer une droite graduée :



Puis on ajoute, en couleur, de façon bien visible, les solutions, en écrivant « solutions » sur la partie des solutions :

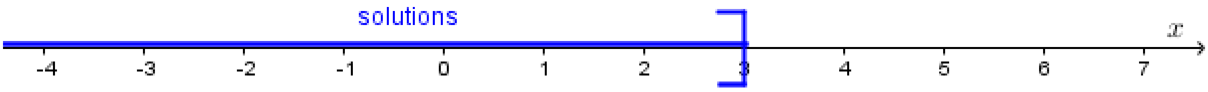
Puis on n'oublie pas d'indiquer si le 3 appartient ou pas aux solutions. Lorsque le 3 appartient aux solutions, alors on va tourner les crochets vers les solutions. Lorsque le 3 n'appartient pas aux solutions, alors on va tourner les crochets en dehors des solutions. Dans ce cas, 3 n'appartient pas aux solutions :



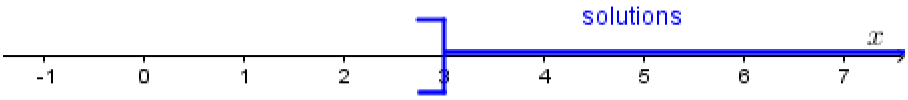
Et voilà !

Maintenant, voici trois autres exemples, terminés, de représentation graphique des solutions d'une inéquation :

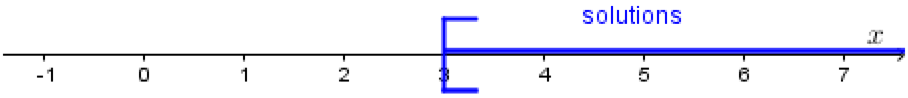
Pour l'inéquation $x \leq 3$



Pour l'inéquation $x > 3$



Pour l'inéquation $x \geq 3$



As-tu bien observé, à chaque fois, de quel côté son coloriées les solutions et de quel côté sont tournés les crochets, et as-tu bien compris pourquoi ? Demande discrètement à ton voisin s'il a également compris et explique-lui si besoin.

Exercice (côté exercices) :

Exercice à faire *deux par deux (ou trois par trois)* : dessine une représentation graphique de solutions d'une inéquation et ton voisin doit trouver la bonne forme de l'inéquation entre $x < k$, $x \leq k$, $x > k$, $x \geq k$.

Représente graphiquement les solutions des inéquations que tu as résolues des exercices 8-9-10 (choisis-en entre 5 et 10) et réfléchis aux quatre inéquations suivantes : $3x + 2 < 3x + 2$; $3x + 2 \leq 3x + 2$; $3x + 2 > 3x + 2$ et $3x + 2 \geq 3x + 2$, nous en parlerons la prochaine fois.