Chapitre 3 NOMBRES

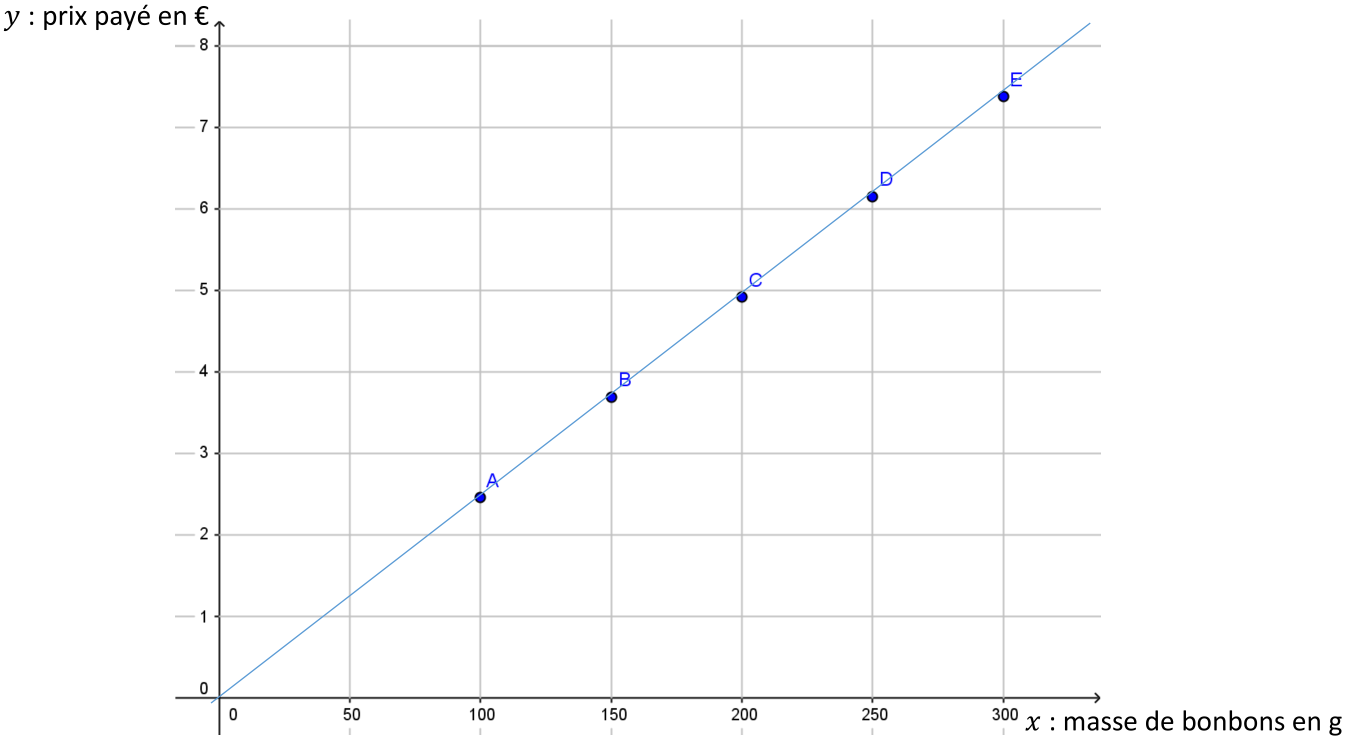
PROPORTIONNALITE

1°) Proportionnalité et représentation graphique.

Voici un tableau de proportionnalité :

Quantité de bonbons achetée (en g.)	100	150	200	250	300
Prix payé (en €)	2,46	3,69	4,92	6,15	7,38

Notons x la première ligne, y la deuxième, et plaçons des points dans un repère gradué.



Prix payé en fonction de la masse de bonbons achetée

On obtient cinq points alignés avec l'origine du repère.

Propriété : si on représente graphiquement une situation de proportionnalité, on obtient toujours de points alignés avec l'origine du repère.

Propriété réciproque : si on a, sur un graphique, des points alignés avec l'origine du repère, alors la grandeur représentée en abscisses est proportionnelle à la grandeur représentée en ordonnées.

Méthode :

Comment calculer le coefficient de proportionnalité k à partir du tableau ou de la représentation graphique :

Je choisis un point $M(x_M ; y_M)$ sur la droite qui représente la situation, alors le coefficient de proportionnalité se calcule ainsi :

$$\boxed{k = \frac{y_M}{x_M}}$$

Exemple : on a mesuré, dans un laboratoire de sciences, la tension et l'intensité électrique aux bornes d'une résistance. On a trouvé le tableau suivant :

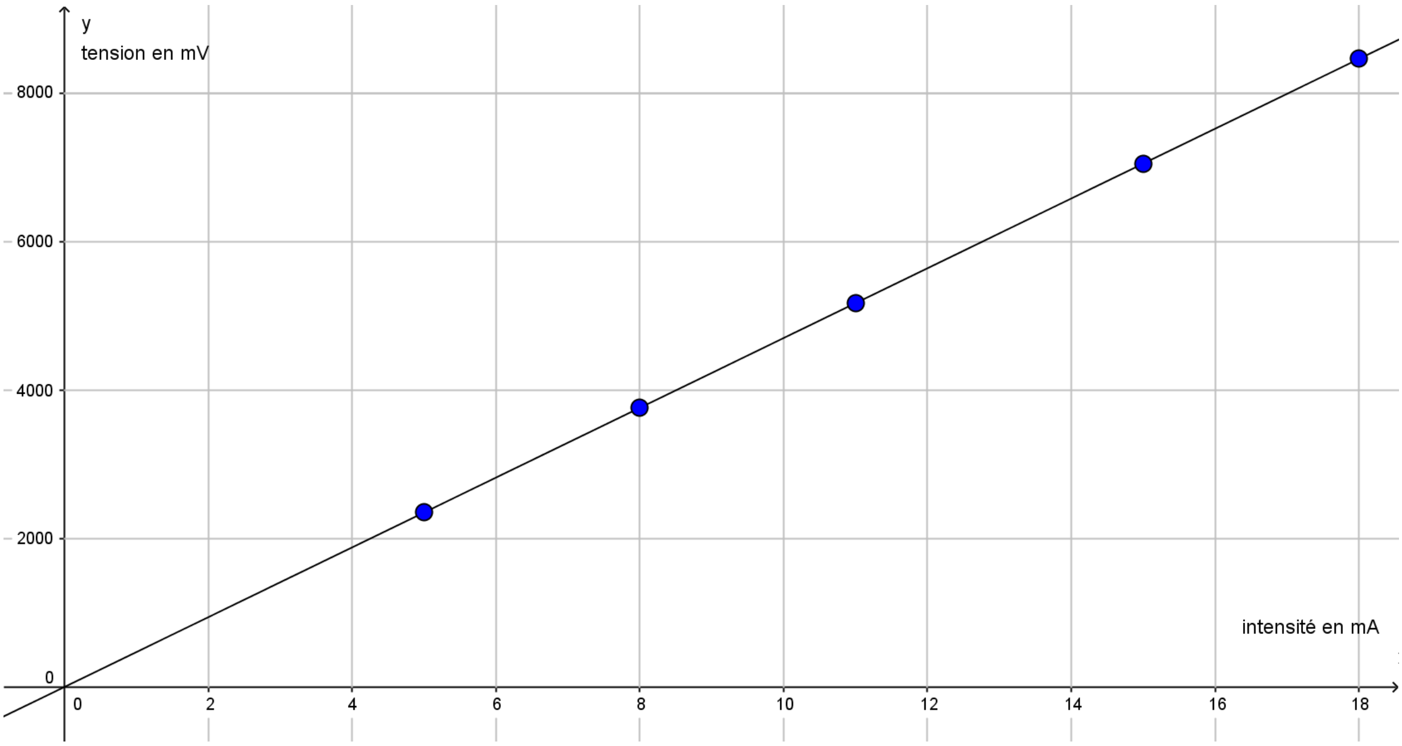
Intensité en mA	5	8	11	15	18
Tension en mV	2 350	3 760	5 170	7 050	8 460

$\boxed{\times k}$

On a bien un tableau de proportionnalité, car tous les quotients sont égaux :

$$\frac{2350}{5} = \frac{3760}{8} = \frac{5170}{11} = \frac{7050}{15} = \frac{8460}{18} = 470 = k$$

avec k coefficient de proportionnalité du tableau.



On observe bien une situation de proportionnalité, car la droite passe bien par l'origine du repère.

Le calcul du coefficient de proportionnalité à partir du graphique donne donc :

$$k = \frac{8460}{18} = 470$$

(il est normal de trouver le même coefficient de proportionnalité à partir du graphique et à partir du tableau, puisque c'est la même situation qui a été représentée).

2°) Pourcentages.

Les pourcentages sont des situations fréquentes de proportionnalité. Il est important d'être à l'aise avec les calculs de pourcentages.

Remarque : un pourcentage est une proportion rapportée à 100 (ayant comme dénominateur 100).
En effet, si dans ma classe de 20 élèves, il y a 5 élèves nés à Paris, alors je peux dire que $\frac{5}{20} = \frac{1}{4}$ est la proportion des élèves nés à Paris, et que $\frac{5}{20} = \frac{25}{100}$ donc 25% des élèves sont nés à Paris.

Voici quelques exemples de calculs qu'il est également possible de résoudre en utilisant le produit en croix :

a) Une forêt contient 13% de saules, 52% de chênes et le reste des peupliers. Sachant que la forêt a une superficie de 20 hectares, calcule la superficie de chênes et de peupliers.

Réponses :

- 13% de 20 ha $= \frac{13}{100} \times 20 = 2{,}6$ hectares. Il y a 2,6 hectares de saules.
- 52% de 20 ha $= \frac{52}{100} \times 20 = 10{,}4$ hectares. Il y a 10,4 hectares de chênes.
- $20 - (2{,}6 + 10{,}4) = 20 - 13 = 7$ donc il y a 7 hectares de peupliers.

b) Une forêt contient 13% de saules, 52% de chênes et le reste des peupliers. Sachant qu'il y a une superficie de 20 hectares de saules, calcule la superficie de chênes et de peupliers.

Réponses :
$\frac{13}{100}$ proportion de saules, $\frac{52}{100} = 4 \times \frac{13}{100}$ proportion de chênes donc il y a $4 \times 20 = 80$ ha de chênes.
Proportion de peupliers : $\frac{100-13-52}{100} = \frac{35}{100}$

	ha	%
$peupliers$		35
$total$	153,84	100

Il y a 53,844 ha de peupliers.

c) Dans une rivière, il y a des anguilles, des truites et des brochets. Sur un total de 250 000 poissons, un huitième d'entre eux sont des anguilles et il y a 95 000 truites. Retrouve le pourcentage d'anguilles, de truites et de brochets qu'il y a dans la rivière.

Réponses :

- $\frac{1}{8} = \frac{x}{100}$ donc $x = \frac{100 \times 1}{8} = 12{,}5$. Le pourcentage d'anguilles est de 12,5%.
- $\frac{95\,000 \div 1\,000}{250\,000 \div 1\,000} = \frac{95 \div 5}{250 \div 5} = \frac{19 \times 2}{50 \times 2} = \frac{38}{100}$. Le pourcentage de truites est de 38%.
- $100 - (38 + 12{,}5) = 100 - 50{,}5 = 49{,}5$. Le pourcentage de brochets est 49,5%.

d) Un agriculteur travaille dans un champ de blé, un champ d'orge et un champ de houblon. Il a déjà recueilli 14% de la récolte des blés, 42% de la récolte d'orge et 75% de la récolte de houblon. Sachant qu'il a déjà récolté 5 068kg de blé, 18 081 kg d'orge et 53 700 kg de houblon, retrouve quelle était la masse totale de chacune des céréales à récolter dans leur champ respectif. Tu convertiras ta réponse en tonnes.

Réponses :

- $\frac{14}{100}=\frac{5\,068}{x}$ donc $x=\frac{5\,068\times100}{14}=36\,200$ kg. La quantité initiale de blé dans son champ de blé était de 36,2 tonnes.
- $\frac{42}{100}=\frac{18\,081}{x}$ donc $x=\frac{18\,081\times100}{42}=43\,050$ kg. La quantité initiale d'orge dans son champ d'orge était de 43,05 tonnes.
- $\frac{75}{100}=\frac{53\,700}{x}$ donc $x=\frac{53\,700\times100}{75}=71\,600$ kg. La quantité initiale de houblon dans son champ de houblon était de 71,6 tonnes.

Nous nous attarderons davantage sur les calculs de pourcentages ayant un rapport avec une augmentation ou une réduction de prix.

Vocabulaire :

- On appelle **variation** de prix une augmentation ou une réduction.
- On appelle **prix initial** le prix avant la variation, et **prix final** le prix après la variation de tarif.
- On appelle **taux de variation**, le taux de pourcentage appliqué pour augmenter ou diminuer un prix.
- On appelle **réduction** (ou **augmentation**), la somme en € qui a été retirée (ou ajoutée) au prix initial.
- On appelle **coefficient multiplicateur** le nombre qui, multiplié au prix initial, donne le prix final.

Quelques formules à connaître :

AUGMENTATION de t%	**REDUCTION de t%**
$prix\ initial + augmentation = prix\ final$	$prix\ initial - rédution = prix\ final$
$prix\ final - augmentation = prix\ intial$	$prix\ final + réduction = prix\ initial$
$prix\ final - prix\ initial = augmentation$	$prix\ initial - prix\ final = réduction$
$prix\ initial\ \times\left(1+\frac{t}{100}\right) = \ prix\ final$	$prix\ initial\ \times\left(1-\frac{t}{100}\right) = \ prix\ final$
$\frac{prix\ final}{\left(1+\frac{t}{100}\right)} = prix\ inital$	$\frac{prix\ final}{\left(1-\frac{t}{100}\right)} = prix\ initial$
$t = 100 \times \left(\frac{prix\ final}{prix\ initial} - 1\right)$	$t = 100 \times \left(1 - \frac{prix\ final}{prix\ initial}\right)$

Remarque : on peut aussi très bien réussir à calculer en utilisant les produits en croix, en faisant très attention à ce que représentent les nombres que l'on utilise.