LES FRACTIONS

1°) Définition

Une fraction est un nombre qui s'écrit sous la forme $\frac{a}{b}$ avec a entier relatif et b entier naturel non nul ($b \neq 0$).

numérateur

$$\frac{a}{b}$$

dénominateur

à retenir :

On dit que $\frac{a}{b}$ est le nombre qui,
si je le multiplie par b,
donne a.

Exemples : $3 \times \frac{7}{3} = 7$; $5 \times \frac{4}{5} = 4$

Remarque : $\frac{0{,}25}{7}$ n'est pas une fraction mais un quotient en écriture fractionnaire.

Dans une fraction, le numérateur et le dénominateur sont obligatoirement des nombres entiers.

2°) Proportion.

Une fraction est un nombre qui représente une proportion.

Exemple : j'ai 512 billes, $\frac{3}{16}$ d'entre elles sont des billes bleues. Combien j'ai de billes bleues ?

Réponse : $512 \times \frac{3}{16} = (512 \times 3) \div 16 = 1536 \div 16 = 96$

Autre méthode : $512 \times \frac{3}{16} = (512 \div 16) \times 3 = 323 = 96$

Autre méthode : $512 \times (3 \div 16) = 512 \times 0{,}1875 = 96$
J'ai 96 billes bleues.

Exemple : j'ai 512 billes, 81 d'entre elles sont rouges. Quelle est la proportion de billes rouges ?
Réponse :

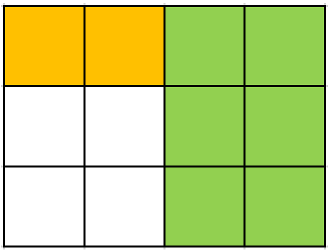
Nombre d'éléments qui répond à la condition Nombre de billes rouges

$$\frac{81}{512}$$

Nombre total d'éléments Nombre total de billes

Exemple : Floriane a une tablette de chocolat. Elle en donne la moitié à Claire, le sixième à Sophie. Quelle proportion lui reste-t-il ?

Remarque : Elle a donné $\frac{1}{2}$ de la tablette à Claire et $\frac{1}{6}$ de la tablette à Sophie. Je vais m'aider d'un schéma :



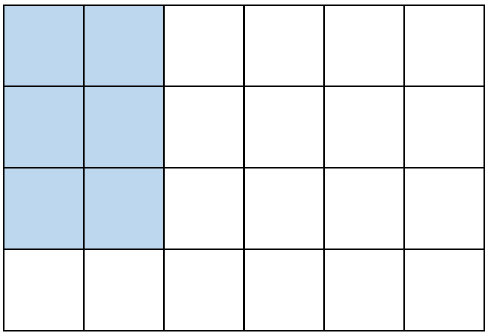
J'ai utilisé les couleurs :
VERT portion que Claire a mangée ORANGE portion que Sophie a mangée

En blanc j'ai la portion restante, qui peut s'écrire de plusieurs façons
$\frac{4}{12}$ ou $\frac{2}{6}$ ou $\frac{1}{3}$
Arrives-tu bien à visualiser ces trois écritures pour la portion blanche à l'aide du schéma ?

Remarque : pour savoir combien de cases il doit y avoir dans le rectangle, je peux calculer le produit ou le ppcm des dénominateurs.

3°) Egalité de quotients

Une même fraction peut s'écrire de plusieurs façons différentes. Par exemple :



La proportion colorée peut s'écrire :

$\frac{6}{24}$ ou $\frac{3}{12}$ ou $\frac{2}{8}$ ou $\frac{1}{4}$

Et si je colorie la même surface mais en partageant, par exemple, chacun de mes carrés en 4, alors ma fraction deviendra $\frac{24}{96}$

L'écriture la plus simple est celle qui utilise les plus petits nombres.
Dans le cas du dessin ci-dessus, il s'agit de $\frac{1}{4}$.

Règle de calcul :

La fraction ne change pas si je multiplie ou divise le numérateur et le dénominateur par un même nombre ($\neq 0$).

C'est-à-dire :

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k} = \frac{a \div k}{b \div k}}$$

Il faut toujours chercher à donner l'écriture la plus simple d'une fraction.
Cette écriture s'appelle : fraction irréductible.
On dit que l'on réduit la fraction, ou encore, que l'on simplifie la fraction.

Remarque : il est important de bien connaître ses tables de multiplication et les critères de divisibilité vus en début d'année !

Exemple : simplifie le plus possible la fraction suivante : $F = \frac{48}{60}$

Méthode 1 : divisions successives

$$F = \frac{48}{60}$$

$$F = \frac{48 \div 2}{60 \div 2}$$

$$F = \frac{24 \div 2}{30 \div 2}$$

$$F = \frac{12 \div 3}{15 \div 3}$$

$$\boxed{F = \frac{4}{5}}$$

Méthode 2 : décomposition en produit de facteurs premiers

$$F = \frac{48}{60}$$

$$48 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$$

$$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$$

$$F = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3}{2 \times 2 \times 3 \times 5}$$

$$F = \frac{2 \times 2}{5}$$

$$\boxed{F = \frac{4}{5}}$$

Méthode 3 : PGCD

$$48 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$$

$$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$$

$$PGCD(48\,;60) = 2 \times 2 \times 3 = 12$$

Je vais directement simplifier par 12

$$F = \frac{48 \div 12}{60 \div 12}$$

$$\boxed{F = \frac{4}{5}}$$

4°) Produits en croix

On peut parfois utiliser une égalité de fractions et un produit en croix pour trouver une valeur manquante, ou pour transformer un dénominateur.

Exemples :

$\frac{?}{5} = \frac{80}{100}$

$(5 \times 80) \div 100 = 4$

donc :

$\frac{4}{5} = \frac{80}{100}$

$\frac{7}{?} = \frac{217}{279}$

$(7 \times 279) \div 217 = 9$

donc :

$\frac{7}{9} = \frac{217}{179}$

$\frac{4}{3} = \frac{?}{261}$

$(4 \times 261) \div 3 = 348$

donc :

$\frac{4}{3} = \frac{348}{261}$

$\frac{11}{3} = \frac{594}{?}$

$(594 \times 3) \div 11 = 162$

donc :

$\frac{11}{3} = \frac{594}{162}$

5°) Fractions et décimaux

a) De la fraction vers le nombre décimal

Pour connaitre la valeur décimale d'une fraction on peut utiliser une calculatrice.
Exemple :

$$\frac{3}{8} = 0{,}375$$

fraction — écriture décimale

Attention cependant, de nombreuses fractions n'ont pas d'écriture décimale. Par exemple :

$$\frac{1}{3} \approx 0{,}333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333$$

$$\frac{2}{7} \approx 0{,}285714285714285714285714285714285714285714285714285714285714285714285714285714286$$

Dans ce cas il est impossible d'en écrire une valeur exacte : on doit utiliser le symbole ≈ et on donne une valeur approchée.

On conseille de connaitre par cœur les fractions les plus courantes :

$$\frac{1}{2} = 0{,}5\ ;\quad \frac{1}{4} = 0{,}25\ ;\quad \frac{1}{5} = 0{,}2\ ;\quad \frac{2}{5} = 0{,}4\ ;\quad \frac{3}{5} = 0{,}6\ ;\quad \frac{4}{5} = 0{,}8\ ;\quad \frac{3}{4} = 0{,}75\ ;\quad \frac{1}{8} = 0{,}125\ ;\quad \frac{1}{10} = 0{,}1 \ldots$$

b) Du nombre décimal vers la fraction

Tous les nombres décimaux peuvent s'écrire sous une forme fractionnaire. On va commencer par transformer l'écriture décimale en fraction décimale, puis on va simplifier la fraction pour avoir une fraction irréductible.

Exemple :

$$0{,}5 = \frac{5}{10} = \frac{5 \div 5}{10 \div 5} = \frac{1}{2}$$

écriture décimale — fraction décimale — fraction irréductible

6°) Comparaison de fractions.

Comment faire pour comparer les nombres $\frac{4}{5}$ et $\frac{3}{4}$ sans utiliser la calculatrice ?

On va étudier plusieurs cas :

- Cas où les dénominateurs sont égaux

Exemple : $\frac{3}{5}$ et $\frac{7}{5}$

Règle à retenir :

> Lorsque les fractions ont le même dénominateur,
> la plus grande fraction est celle qui a le plus grand numérateur.

Donc, ici, on a : $\frac{3}{5} < \frac{7}{5}$

- Cas où les numérateurs sont égaux

Exemple : $\frac{5}{3}$ et $\frac{5}{7}$

Règle à retenir :

> Lorsque les fractions ont le même numérateur,
> la plus grande fraction est celle qui a le plus petit dénominateur.

Donc, ici, on a : $\frac{5}{3} > \frac{5}{7}$

- Cas où les numérateurset les dénominateurs sont différents

Exemple : $\frac{4}{5}$ et $\frac{3}{4}$

Règle à retenir :

> Pour comparer facilement les fractions,
> on les met au le même dénominateur.

$$\frac{4}{5} \quad et \quad \frac{3}{4}$$
$$\frac{4}{5} = \frac{4 \times 4}{5 \times 4} = \frac{16}{20}$$
$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 5}{4 \times 5} = \frac{15}{20}$$

Comme $\frac{16}{20} > \frac{15}{20}$ on peut dire que $\frac{4}{5} > \frac{3}{4}$.

- Remarque

Une fraction plus petite que 1 a son dénominateur plus grand que son numérateur (exemples : $\frac{1}{7}$; $\frac{9}{13}$)

Une fraction plus grande que 1 a son dénominateur plus petit que son numérateur (exemples : $\frac{7}{2}$; $\frac{250}{3}$)

7°) Somme entre deux fractions.

- Cas n°1 : les deux fractions ont le même dénominateur

On additionne ou on soustrait les numérateurs entre eux, et on laisse le dénominateur inchangé.
Avant d'encadrer la solution, on regarde si on peut simplifier la fraction.

Exemples :

$A = \frac{3}{11} + \frac{2}{11}$

$A = \frac{3+2}{11}$

$\boxed{A = \frac{5}{11}}$

$B = \frac{7}{3} - \frac{2}{3}$

$B = \frac{7-2}{3}$

$\boxed{B = \frac{5}{3}}$

$C = \frac{19}{4} + \frac{3}{4}$

$C = \frac{19+3}{4}$

$C = \frac{22}{4}$

$C = \frac{22 \div 2}{4 \div 2}$

$\boxed{C = \frac{11}{2}}$

- Cas n°2 :un des dénominateurs est dans la table de multiplication de l'autre

On doit mettre au même dénominateur **avant** de faire l'addition ou la soustraction.

Exemples :

$A = \frac{2}{7} + \frac{1}{28}$

$A = \frac{2 \times 4}{7 \times 4} + \frac{1}{28}$

$A = \frac{8+1}{28}$

$\boxed{A = \frac{9}{28}}$

$B = \frac{14}{15} - \frac{2}{5}$

$B = \frac{14}{15} - \frac{2 \times 3}{5 \times 3}$

$B = \frac{14-6}{15}$

$\boxed{B = \frac{8}{15}}$

$C = \frac{1}{6} + \frac{23}{24}$

$C = \frac{1 \times 4}{6 \times 4} + \frac{23}{24}$

$C = \frac{4+23}{24}$

$C = \frac{27 \div 3}{24 \div 3}$

$\boxed{C = \frac{9}{8}}$

- Cas n°3 :les dénominateurs sont différents

On doit mettre au même dénominateur avant de faire l'addition ou la soustraction.

Exemples :

$A = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$

$A = \frac{1 \times 3}{2 \times 3} + \frac{1 \times 2}{3 \times 2}$

$A = \frac{3+2}{6}$

$\boxed{A = \frac{5}{6}}$

$B = \frac{5}{7} - \frac{1}{4}$

$B = \frac{5 \times 4}{7 \times 4} - \frac{1 \times 7}{4 \times 7}$

$B = \frac{20-7}{28}$

$\boxed{B = \frac{13}{28}}$

je peux être astucieux

$C = \frac{4}{15} + \frac{5}{12}$

$C = \frac{4 \times 4}{15 \times 4} + \frac{5 \times 5}{12 \times 5}$

$C = \frac{16+25}{60}$

$\boxed{C = \frac{41}{60}}$

8°) Multiplications entre deux fractions.

Pour effectuer une multiplication entre deux fractions, il faut multiplier les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

Exemples :

$$A = \frac{3}{5} \times \frac{7}{2}$$
$$A = \frac{3 \times 7}{5 \times 2}$$
$$\boxed{A = \frac{21}{10}}$$

$$B = \frac{1}{3} \times \frac{5}{11}$$
$$B = \frac{1 \times 5}{3 \times 11}$$
$$\boxed{B = \frac{5}{33}}$$

$$C = \frac{4}{5} \times 8$$
$$C = \frac{4 \times 8}{5}$$
$$\boxed{C = \frac{32}{5}}$$

Remarque : avec les multiplications il est parfois IMPORTANT de simplifier AVANT de calculer

Exemples :

$$A = \frac{11}{4} \times \frac{4}{11}$$
$$A = \frac{11 \times 4}{4 \times 11}$$
$$\boxed{A = 1}$$

$$B = \frac{49}{25} \times \frac{25}{16} \times \frac{16}{10}$$
$$B = \frac{49 \times 25 \times 16}{25 \times 16 \times 10}$$
$$\boxed{B = \frac{49}{10}}$$

$$C = \frac{56}{15} \times \frac{45}{21}$$
$$C = \frac{8 \times 7 \times 4 \times 5}{3 \times 5 \times 3 \times 7}$$
$$C = \frac{8 \times 4}{3 \times 3}$$
$$\boxed{C = \frac{32}{9}}$$

9°) Divisions entre deux fractions.

a) inverse d'un nombre

Principe : le produit entre un nombre et son inverse fait toujours 1.

Exemples :

Nombre	2	$\frac{1}{3}$	-5	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{5}{11}$
inverse	$\frac{1}{2}$	3	$\frac{1}{-5}$	-4	1	n'existe pas	$\frac{3}{2}$	$-\frac{11}{5}$

Attention à ne pas confondre **inverse** d'un nombre (le produit fait 1) (exemple : $\frac{1}{3}$ et 3)
avec **opposé** d'un nombre (la somme fait 0) (exemple : -5 et 5)

b) diviser par une fraction

Principe : on transforme la division en multiplication.

diviser par une fraction,
c'est multiplier par son inverse

Exemples :

$A = \frac{11}{5} \div \frac{1}{7}$

$A = \frac{11}{5} \times \frac{7}{1}$

$\boxed{A = \frac{77}{5}}$

$B = \frac{4}{9} \div \frac{5}{7}$

$B = \frac{4}{9} \times \frac{7}{5}$

$\boxed{B = \frac{28}{45}}$

$C = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}}$

$C = \frac{2}{3} \div \frac{5}{7}$

$C = \frac{2}{3} \times \frac{7}{5}$

$\boxed{C = \frac{14}{15}}$

$D = \frac{9}{\frac{7}{11}}$

$D = 9 \div \frac{7}{11}$

$D = 9 \times \frac{11}{7}$

$\boxed{D = \frac{99}{7}}$