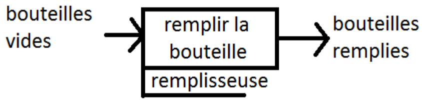
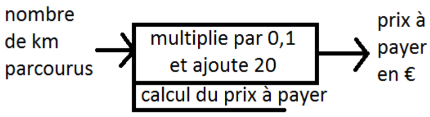
NOTION DE FONCTION

But : comprendre la notion de fonction, voir les principales notations

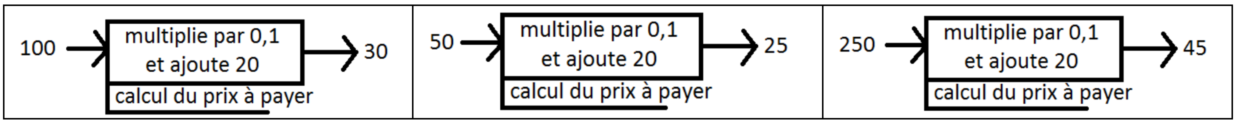
Dans une entreprise qui met du jus de fruit dans des bouteilles en plastique, chaque machine a un rôle bien défini. Prenons l'exemple de la machine chargée de remplir la bouteille avec le jus de fruits. En entrée, elle reçoit du jus de fruits. En sortie, elle donne une bouteille remplie. Nous pouvons schématiser la situation ainsi :



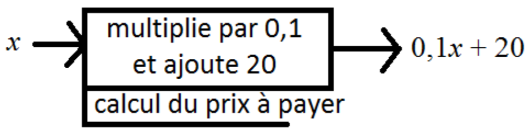
En mathématiques, parfois, on a besoin de faire plusieurs fois la même succession d'opérations. Par exemple : une société de location de voitures facture 20€ pour les frais administratifs et 0,1€ par kilomètres parcourus.
Une personne qui loue une voiture et parcours 100km payera donc $100 \times 0{,}1 + 20 = 30$€.
Une personne qui loue une voiture et parcours 50km payera donc $50 \times 0{,}1 + 20 = 25$€.
Une personne qui loue une voiture et parcours 250km payera donc $250 \times 0{,}1 + 20 = 45$€.
Nous avons bien une situation dans laquelle il faut faire plusieurs fois les mêmes calculs.
Représentons cette situation par un schéma comme pour la machine de l'entreprise :



On peut faire un schéma pour chaque exemple précédemment choisi :



Et le tour est joué !
Le seul problème, c'est que la notation n'est pas pratique.
En mathématique, on appelle fonction la « machine » qui fait toujours la même succession d'opérations. Très souvent, on note cette fonction f.
Regardons ce qui se passe lorsque nous appliquons ce calcul à x :



En mathématiques, on dira que f est la fonction qui renverra le prix à payer en euros en fonction du nombre de kilomètres x parcourus.

Ici, f est la fonction qui, à tout nombre, fait correspondre le produit de ce nombre par 0,1 augmenté de 20

Notation : $f(x) = 0{,}1x + 20$ lire : « f de x égale 0,1x+20 »
Notation : $f : x \mapsto 0{,}1x + 20$ lire : « f est la fonction qui à x associe le nombre 0,1x+20 »
On peut traduire notre exemple par : $f(100) = 30$; $f(50) = 25$; $f(250) = 45$.

En résumé :

Une fonction est comme une machine qui réalise plusieurs opérations successives. Pour définir une fonction, on peut utiliser une phrase, une égalité, ou une notation.

CALCUL D'UNE IMAGE – CALCUL D'UN ANTECEDENT

But : savoir calculer une image ou un antécédent par une fonction donnée.

Méthode : on utilise la définition suivante :

$$f(x) = y \Leftrightarrow l'image\ de\ x\ par\ f\ est\ y \Leftrightarrow l'antécédent\ de\ y\ par\ f\ est\ x$$

Ou encore :

$$f(x) = y \Leftrightarrow y\ est\ l'image\ de\ x\ par\ f \Leftrightarrow x\ est\ l'antécédent\ de\ la\ fonction\ par\ f$$

Un exemple :

1°) On donne $f(\boldsymbol{x}) = 5\boldsymbol{x}^2 - 3$. Calculer l'image des nombres 0 ; $\frac{1}{2}$; -2 par f.

$f(\mathbf{0}) = 5 \times \mathbf{0}^2 - 3$
$f(0) = -3$
L'image de 0 par f est -3

$f\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right) = 5 \times \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{2}} - 3$
$f\left(\frac{1}{2}\right) = 5 \times \frac{1}{4} - 3$
$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4} - \frac{12}{4}$
$f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{7}{4}$
L'image de $\frac{1}{2}$ par f est $-\frac{7}{4}$

$f(-\mathbf{2}) = 5 \times (-\mathbf{2})^{\mathbf{2}} - 3$
$f(-2) = 5 \times 4 - 3$
$f(-2) = 20 - 3$
$f(-2) = 17.$
L'image de -2 par f est 17.

2°) On donne $h(x) = 2x - 8$. Calculer l'antécédent du nombre -3 par h.

Je cherche x tel que $h(x) = -3$
donc tel que $2x - 8 = -3$
c'est-à-dire $2x = -3 + 8$
soit $2x = 5$
donc $x = \frac{5}{2}$
L'antécédent de -3 par h est $\frac{5}{2}$

3°) On donne $g(x) = 4x^2$. Calculer l'antécédent des nombres 8 et -4 par g.

Je cherche x tel que $g(x) = 8$
donc tel que $4x^2 = 8$
c'est-à-dire $x^2 = 2$
donc $x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$
Les antécédents de 8 par g sont $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$.

Je cherche x tel que $g(x) = -4$
donc tel que $4x^2 = -4$
c'est-à-dire $x^2 = -1$
c'est impossible
Il n'existe pas d'antécédents de -4 par g.

Remarques :

- ✓ Il ne peut pas exister plusieurs images.
- ✓ Il est possible de trouver plusieurs antécédents, ou aucun.

A vous de jouer :

1°) On donne $f(x) = -2x^2 + \frac{x}{2}$. Calculer l'image des nombres 0, 4, -1 et -6 par f.

2°) On donne $h(x) = 0{,}25x$. Calculer l'antécédent des nombres 16, -8 et -3 par h.

3°) On donne $g(x) = x^2 - 4$. Calculer l'antécédent des nombres 0 et 1 par g.

REPRESENTER GRAPHIQUEMENT UNE FONCTION

But : savoir représenter graphiquement une fonction

Méthode : nous allons utiliser la méthode du tracé « point par point ».

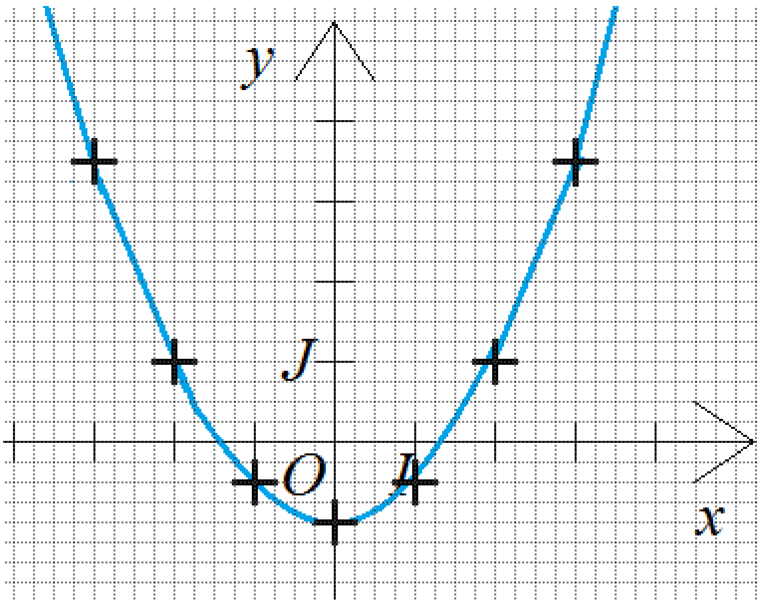
Exemple : Considérons la fonction suivante : $f(x) = 0{,}5x^2 - 1$.

1°) Compléter le tableau de valeurs suivant :

Pour compléter le tableau de valeur (la première ligne est donnée, je ne dois compléter que les cases avec le fond orange), je calcule l'image de chaque valeur de x proposée à l'aide de ma calculatrice.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	*abscisses*
$y = f(x)$	$3{,}5$	1	$-0{,}5$	-1	$0{,}5$	1	$3{,}5$	*ordonnées*

2°) Placer tous les points dans un repère
3°) Relier tous les points de façon à obtenir la représentation graphique d'une fonction



A vous de jouer :

On donne la fonction suivante : $f(x) = -2{,}5x + 1{,}5$.
Compléter le tableau de valeurs suivant, puis placer les points dans un repère et les relier pour tracer la représentation graphique de la fonction.

x	-2	-1	0	$1{,}5$	*abscisses*
$y = f(x)$					*ordonnées*

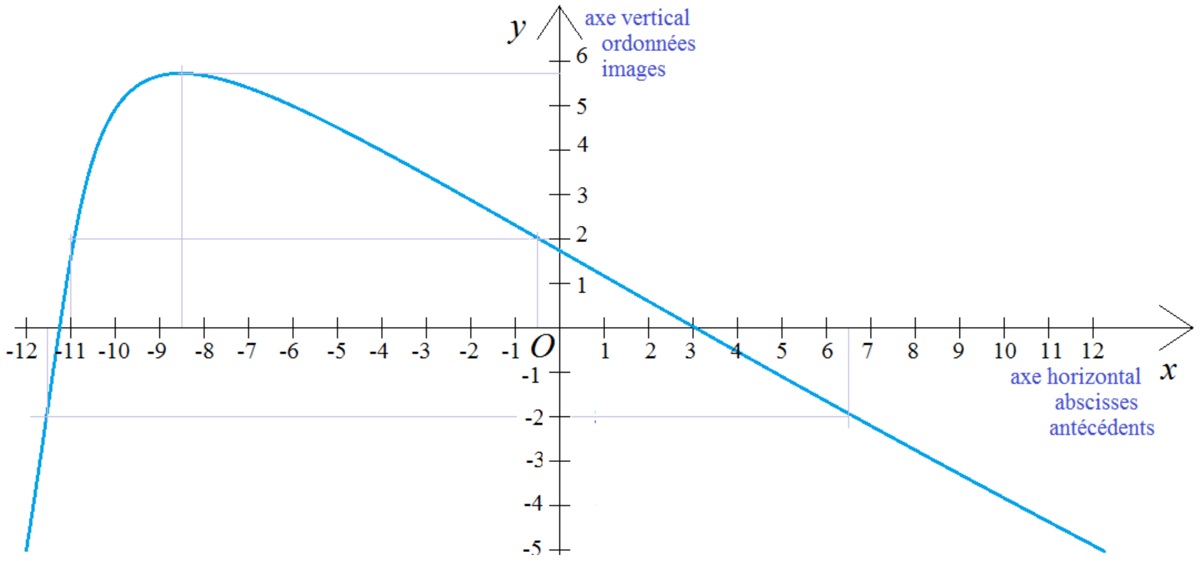
DETERMINER GRAPHIQUEMENT UNE IMAGE, UN OU DES ANTECEDENT(S)

But : savoir déterminer graphiquement une image, un ou des antécédent(s)

Méthode : tout point M de coordonnées $(x_M ; y_M)$ qui appartient à la représentation graphique d'une fonction f a ses coordonnées qui vérifient $y_M = f(x_M)$; alors x_M est l'antécédent de y_M par f et y_M est l'image de x_M par f.

Exemples :

On donne la représentation graphique ci-dessous.



Remarque : en général on demandera de laisser apparents les traits de construction (ici en gris).

1°) Quelle est l'image de $-8{,}5$ par f ? L'image de $-8{,}5$ par f est environ 5,75.
2°) Quels sont les antécédents de 2 par f ? Les antécédents de 2 par f sont $-0{,}5$ et -11.
3°) Quel est l'antécédent de 7 par f ? Il n'existe pas d'antécédents de 7 par f.
4°) Quelle est l'image de $-11{,}5$ par f ? L'image de $-11{,}5$ par f est -2.
5°) Quelle est l'image de 6,5 par f ? L'image de 6,5 par f est -2

A vous de jouer :
1°) Quelle est l'image de 0 par f ?
2°) Quels sont les antécédents de 0 par f ?
3°) Quelle est l'image de 10 par f ?
4°) Quel est l'antécédent de 5,75 par f ?