2nde

DEVOIR SURVEILLE

Durée : 2h00. Matériel autorisé : calculatrice.

Exercice 1 (6 points)

Dark Vador souhaite conquérir le Monde. Il a créé une armée de soldats. Entre les costumes, l'entraînement, l'équipement, la formation, la nourriture et les salaires, l'armée est extrêmement coûteuse et Dark Vador souhaite trouver le meilleur rapport qualité-prix, afin de pouvoir investir également dans la recherche pour son vaisseau spatial.

En aucun cas il ne souhaite dépasser les 200 milliards d'euros pour son armée.

Il a déjà remarqué que, pour un nombre de millions de soldats donné x, le prix payé pour le financement de son armée est donné en milliards d'euros par une fonction f définie par $f(x) = (x - 10)(x - 15) + 50$; c'est-à-dire que, par exemple, s'il souhaite avoir une armée qui compte 1 million de soldats, cela lui coûterait $f(1) = (-9) \times (-14) + 50 = 176$ milliards d'euros.

Il vous engage afin de répondre à ces questions :

1. Donner l'ensemble de définition de la fonction f (remarque : faire attention au cadre de notre énoncé : on ne peut pas engager un nombre négatif de soldats…) — 0,5 points
2. Développer et réduire $f(x)$. — 1 point
3. Résoudre l'équation $f(x) = 200$ — 1 point
4. Montrer que $f(x)$ s'exprime sous la forme $f(x) = (x - 12{,}5)^2 + 43{,}75$ — 0,5 point
5. En déduire que f admet pour minimum $43{,}75$. Pour quelle valeur de x ce minimum est-il atteint ? — 1 point
6. A l'aide de votre calculatrice graphique, représentez la fonction avec un réglage allant de 0 à 25 sur l'axe des abscisses et de 40 à 200 sur l'axe des ordonnées ; donner le tableau de variation de la courbe obtenue. — 0,75 point
7. Répondre à Dark Vador en lui précisant le nombre de millions de soldats qu'il doit engager pour avoir un coût moindre et préciser à combien de milliards d'euros s'élèverait ce coût.
   En vous aidant de la question 3, vous indiquerez également quel est le nombre de millions de soldats à ne pas dépasser s'il ne veut pas dépasser les 200 milliards d'euros de dépenses. — 1,25 point

Correction de l'exercice 1 : étude de fonction

1. f est définie sur $[0\,;\,+\infty[$
2. $f(x) = (x-10)(x-15)+50 \;= x^2 - 25x + 200$
3. $x^2 - 25x + 200 = 200 \Leftrightarrow x^2 - 25x = 0 \Leftrightarrow x(x-25) = 0$
   or un produit est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul

   $x = 0$ ou $x - 25 = 0 \Leftrightarrow x = 25$ donc l'équation $f(x) = 200$ admet deux solutions : 0 et 200
4. $(x-12{,}5)^2 + 43{,}75 = x^2 - 25x + 156{,}25 + 43{,}75 = x^2 - 25x + 200$
5. $(x-12{,}5)^2$ est toujours positif donc pour toute valeur de x on a $f(x) \geq 43{,}75$.
   Donc 43,75 est le minimum atteint par la fonction f. Il est atteint lorsque $x - 12{,}5 = 0$ donc lorsque $x = 12{,}5$.
6. Voici l'allure du graphique obtenu à la calculatrice avec les bons réglages :

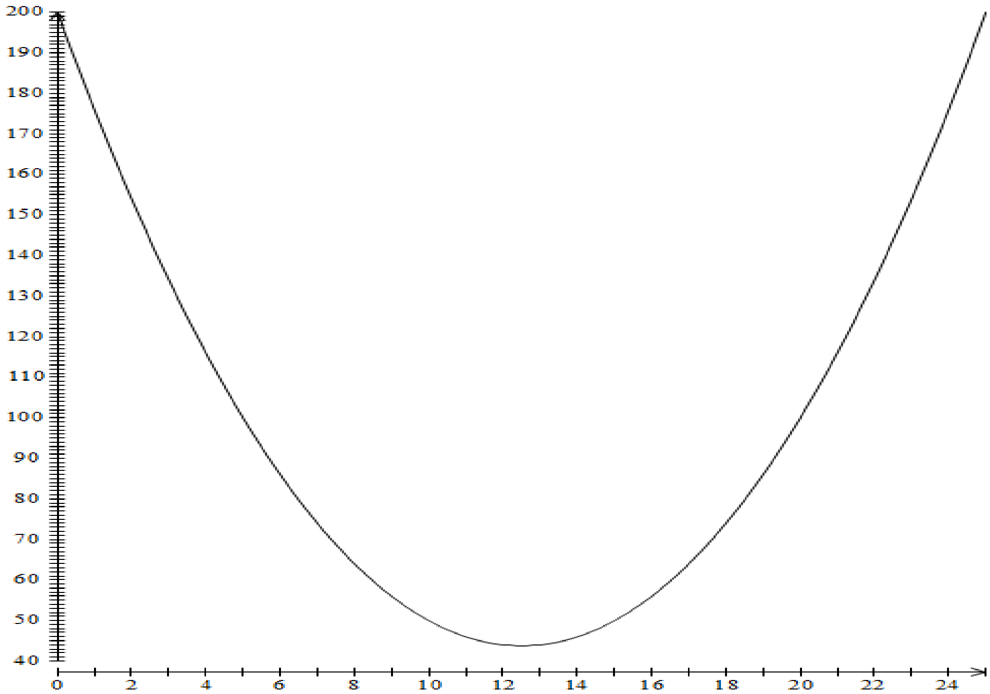


Tableau des variations associé :

x	0		12,5		$+\infty$
Variations de f	200	$\searrow$	43,75	$\nearrow$	

7. Pour avoir la meilleure rentabilité possible, Dark Vador doit engager 12,5 millions de soldats. Ses frais s'élèveront alors à 43,75 milliards d'euros. D'après la question 2, il ne doit pas engager plus de 25 millions de soldats, car alors il aurait des frais supérieurs à 200 milliards d'euros.

<u>Exercice 2</u> <u>(6 points)</u> - *inspiré du devoir de Mr David Robert, http://perpendiculaires.free.fr/wp-content/Seconde20112012.pdf*

Dans une célèbre école du nom de POUDLARD, les élèves sont répartis dans quatre « maisons » nommées : *Poufsouffle*, *Serpentard*, *Gryffondor* et *Serdaigle*.

Partie I (barème par question : 0,5+1+1+0,5+0,75)

La répartition des 2 500 élèves est actuellement la suivante :

Poufsouffle	Serpentard	Gryffondor	Serdaigle
624	575	675	626

Drago, l'un des représentants de la maison Serpentard, veut se plaindre au directeur de l'école car, selon lui, le choix du nombre d'élèves par maison n'a pas pu se faire de façon aléatoire et il se sent lésé.

1. Quelle est la proportion (théorique) d'élèves dans chaque maison si le choix est aléatoire ?
2. Quel est l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% correspondant à un échantillon de taille 2500 pour cette proportion ?
3.
   a. Déterminer les fréquences des élèves dans chacune des maisons
   b. Appartiennent-elles toutes à l'intervalle de fluctuation ?
4. Drago a-t-il raison de se plaindre ?

Partie II (barème par question : 0,5+1+0,75)

C'est bientôt l'élection des représentants dans la maison Gryffondor et une candidate nommée Hermione Granger se présente. Lors du dernier sondage réalisé par la gazette du sorcier sur un échantillon de 400 élèves, on estime que Hermione Granger devrait obtenir 215 voix. Pour être élue, elle doit avoir plus de la moitié des voix. Ron Wisley, un ami de Hermione Granger, s'inquiète : il se demande s'il devrait aller aider Hermione dans sa campagne, pour tenter d'augmenter le nombre potentiel de voix ; ou s'il peut aller se détendre devant une partie de Quidditch (sport).

1. Si la prévision du journal se vérifie, quelle est la proportion des voix que Hermione Granger aura obtenues ?
2. Calculer l'intervalle de confiance au seuil de 95% correspondant à cette proportion.
3. Que conseillez-vous à Ron ? Peut-il aller se détendre ou est-il préférable qu'il aille aider Hermione ?

Correction de l’exercice 2 : fluctuations, échantillonnage, intervalle de confiance, prise de décision

Partie I

1. La proportion théorique des élèves dans chaque maison, si le choix est aléatoires, est $\frac{1}{4} = 0{,}25$.
2. L’intervalle de fluctuation au seuil de 95% correspondant est $\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{\sqrt{2500}} ; \frac{1}{4} + \frac{1}{\sqrt{2500}}\right] = [0{,}23; 0{,}27]$
3.
   a. Poufsouffle : $\frac{264}{2500} = 0{,}2496$; Serpentard : $\frac{575}{2500} = 0{,}23$; Gryffondor : $\frac{675}{2500} = 0{,}27$ et Serdaigle : $\frac{626}{2500} = 0{,}2504$.
   b. Les fréquences obtenues appartiennent toutes à l’intervalle de fluctuation au seuil de 95%.
4. Drago a tort de se plaindre : en effet toutes les fréquences appartiennent à l’intervalle de fluctuation ; ainsi le choix du nombre d’élèves par maison est bien dû au hasard.

Partie II

1. Si la prévision du journal se vérifie, Hermione aura obtenu $\frac{215}{400} = 0{,}5375$.
2. L’intervalle de confiance au seuil de 95% correspondant est
$$\left[0{,}5375 - \frac{1}{\sqrt{400}} ; 0{,}5375 + \frac{1}{\sqrt{400}}\right] = [0{,}4875 ; 0{,}5875]$$
3. Etant donné que Hermione ne sera directement élue que si la fréquence des voix obtenues est supérieure à 0,5 et que cette valeur appartient à l’intervalle de confiance, il est préférable pour Ron d’aller soutenir Hermione dans sa campagne, car pour le moment, il n’est pas certain qu’elle soit élue.

Exercice 3 (4 points) répartition des points : 1 point par question

Dans un repère, on donne les points suivants : $A(1;4)$; $B(5;1)$; $C(-1;-3)$.

1. Démontrer que les points A, B, C forment un triangle.
2. Faire une figure. Calculer les coordonnées du milieu I du segment $[BC]$, puis placer ce point I sur la figure.
3. Calculer le coefficient directeur de la médiane (AI) du triangle ABC.
4. Tracer la droite d parallèle à (AI) passant par B. Donner l'équation de d.

Exercice 4 (4 points) répartition des points : 0,75+0,5+0,5+2,25

Voici un algorithme :

```
Variables :
i, n, tot : nombres
Début algorithme.
        tot←0
        Saisir n
        Pour i de 1 à n faire
                tot←tot+i
        Fin pour
        Afficher tot
Fin de l'algorithme.
```

1. Tester l'algorithme dans le tableau ci-dessous pour la valeur n=5.
2. Que fait l'algorithme ?
3. A quoi sert la ligne « tot ←0 » ?
4. Proposer un algorithme permettant de calculer le produit de tous les nombres compris entre 1 et n, n étant choisi par l'utilisateur.

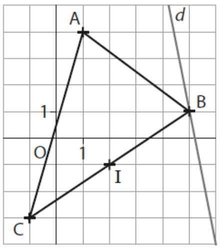
variables	i	n	tot
entrée			
traitement			
sortie			

Correction exercice 3 :

a) Le coefficient directeur de la droite (AB) se calcule par $\frac{1-4}{5-1}=\frac{-3}{4}$, et celui de la droite (AC) se calcule par $\frac{-3-4}{-1-1}=\frac{7}{2}$.

Les coefficients directeurs des droites (AB) et (AC) sont différents, donc les points A, B et C ne sont pas alignés et forment un triangle.

b)



$I\left(\frac{-1+5}{2};\frac{-3+1}{2}\right)$, soit $I(2\,;-1)$.

c) Le coefficient directeur de la droite (AI) $=\frac{-1-4}{2-1}=-5$.

d) La droite d a une équation de la forme $y=-5x+p$, or $y_B=-5x_B+p$, soit $1=-5\times 5+p=-25+p$.

Donc $p=26$ et $d : y=-5x+26$.

Correction exercice 4 :

variables	i	n	tot
entrée		5	
traitement			0
	1		
			1
	2		
			3
	3		
			6
	4		
			10
	5		
			15
sortie			15

L’algorithme fait la somme de tous les nombres compris entre 1 et n.

Cette ligne est l’initialisation de la variable dans laquelle on va sommer.

Variables :
i, n, tot : nombres

Début algorithme.
    tot←1
    Saisir n
    Pour i de 1 à n faire
        tot←tot*i
    Fin pour
    Afficher tot
Fin de l’algorithme.