2nde

TEST d'une heure sur 15 points.

MATHEMATIQUES

EXERCICE 1. 6 points

On donne la fonction suivante : $f(x) = (5x + 15)(2 - x) - 10$

1. Développer et réduire f. — 1 point.
2. Prouver que f s'exprime aussi sous la forme $f(x) = -5\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{85}{4}$ — 1 point.
3. Résoudre l'équation $f(x) = -10$ en choisissant la meilleure forme possible pour f. — 1 point.
4. En choisissant la forme la plus adaptée, indiquez quel est le maximum de la fonction et pour quelle valeur de x il est atteint. Justifier. — 1 point.
5. On veut représenter graphiquement la fonction sur la calculatrice. En vous aidant de la question précédente, indiquez quelle doit être la valeur y_{MAX} de la fenêtre. — 0,5 point.
6. Représentez graphiquement sur votre calculatrice la courbe C représentative de f et la droite d d'équation $y = -10$ dans un même repère. On suggère de prendre les réglages suivants : $x_{MIN} = -4$; $x_{MAX} = 3$; $y_{MIN} = -11$ et $y_{MAX} = 22$. Donner les coordonnées des points d'intersection obtenus entre la courbe et la droite. Que pouvez-vous dire par rapport à la question 3 ? — 0,5 point.

Exercice 2. 2,5 points

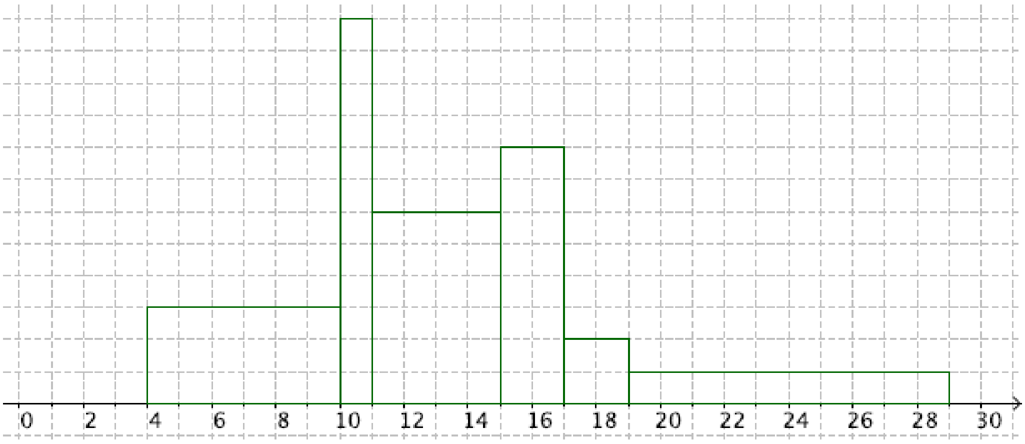
source : http://perso.crans.org/pklein/Maths/lycee.html

On se propose de comparer $A = \sqrt{3} + \sqrt{5}$ et $B = \sqrt{7 + 2\sqrt{15}}$. Difficile de le faire mentalement… et pourtant !

1. Donner la valeur exacte de A^2, puis de B^2. Calcul mental accepté (dans ce cas vous pouvez donner directement le résultat). — 1 point
2. Peut-on facilement comparer A^2 et B^2 ? — 0,5 point
3. En déduire, sans aucun calcul, une comparaison de A et B en justifiant le raisonnement utilisé. *(On s'appuiera sur une propriété de la fonction carrée, à préciser).* — 1 point

Exercice 3 6,5 points *source : http://perso.crans.org/pklein/Maths/lycee.html*

1. Dans l'histogramme suivant, l'effectif de la classe $[17; 19[$ est égal à 2 :



a) Faire un tableau décrivant les effectifs de chaque classe. — 1 point

NB : on conseille un tableau en trois lignes : classes, aire en carreaux, effectifs.

b) Quelle est la classe modale de cette série ? Justifier la réponse. — 1 point

NB : on rappelle que le mode d'une série statistique est la valeur du caractère pour laquelle l'effectif est le plus grand.

2. Le tableau suivant donne le salaire brut mensuel, par catégorie socioprofessionnelle, simplifiée dans une entreprise :

Salaire	900	1100	1300	1500	1700	1900	2100	2500	3100	4500
Effectif	12	10	20	18	8	8	5	5	2	1

a) Calculez les effectifs cumulés croissants. — 1 point

b) Calculez l'étendue des salaires dans cette entreprise. — 0,5 point

c) Quel est le montant du salaire médian ? Déterminer les montants du premier et du troisième quartile. — 1,5 point

d) Calculez le montant du salaire moyen de l'entreprise. — 1,5 point

e) Représentez les résultats des questions a) à c) par un diagramme en boîte. Sur ce diagramme, vous représenterez le salaire moyen calculé à la question d) par une croix. — QUESTION BONUS +1

Solutions :

Exercice 1

1. $f(x) = (5x + 15)(2 - x) - 10 \; = \; -5x^2 - 5x + 30$ — 1 point

2. $-5\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{85}{4} = -5\left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) + \frac{85}{4} = -5x^2 - 5x - \frac{5}{4} + \frac{85}{4}$
$= -5x^2 - 5x + \frac{80}{4} = -5x^2 - 5x + 20$. Donc c'est bien une autre expression de $f(x)$. — 1 point

3. Je choisis la première forme, alors $(5x + 15)(2 - x) - 10 = -10$ ce qui revient à dire que $(5x + 15)(2 - x) = 0$, or un produit est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul, d'où $5x + 15 = 0$ ou $2 - x = 0$; d'où $x = -3$ ou $x = 2$.
L'équation $f(x) = -10$ admet deux solutions : -3 ou 2. — 1 point

4. Je choisis la forme donnée dans la question 2. Dans cette forme, je constate que l'on retire une quantité positive ou nulle au nombre $\frac{85}{4}$, donc le maximum atteint par f est $\frac{85}{4}$ et ce maximum est atteint lorsque $-5\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = 0$ donc lorsque $x = -\frac{1}{2}$. — 1 point

5. Comme le maximum est $\frac{85}{4} = 21{,}25$ il suffit de choisir un peu au-dessus de cette valeur pour y_{MAX}, par exemple $y_{MAX} = 21{,}5$ — 0,5 point

6. Les deux points d'intersection ont pour coordonnées $(-3; -10)$ et $(2; -10)$.
Les abscisses de ces points sont les solutions de l'équation $f(x) = -10$ résolue à la question 3. — 0,5 point

Exercice 2 :

1.
$$A^2 = \left(\sqrt{3} + \sqrt{5}\right)^2 = 3 + 5 + 2\sqrt{15} = 8 + 2\sqrt{15}$$
$$B^2 = \sqrt{7 + 2\sqrt{15}}^{\,2} = 7 + 2\sqrt{15}$$
1 point

2. On peut dire sans difficulté que $A^2 > B^2$ — 0,5 point
3. A et B sont deux nombres positifs.

La fonction carrée est strictement croissante sur $[0; +\infty[$ donc elle conserve l'ordre sur cette intervalle. C'est pourquoi A et B sont rangées dans le même ordre que A^2 et B^2. — 1 point
Comme $A^2 > B^2$ on en déduit que $A > B$.

Exercice 3 :

1.a)

Classe	[4; 10[	[10; 11][	[11; 15[	[15; 17[	[17; 19[	[19; 29[
Aire en carreaux	18	12	24	16	4	10
Effectif	9	6	12	8	**2**	5

1 point

Remarque : l'effectif total de la série est égal à 42.

1.b)

La classe modale est la classe qui a le plus grand effectif (autrement dit encore, l'aire la plus grande). D'après le tableau, c'est la classe $[11; 15[$.

1 point

2.a) tableau des effectifs cumulés croissants

Salaire	900	1 100	1 300	1 500	1 700	1 900	2 100	2 500	3 100	4 500
Effectif	12	10	20	18	8	8	5	5	2	1
ECC	12	22	42	60	68	76	81	86	88	89

1 point

Cette entreprise a 89 salariés.

2.b) étendue

0,5 point

L'étendue du salaire dans cette entreprise est de $4\,500 - 900 = 3\,600$ euros.

2.c) salaire médian, premier et troisième quartile

L'effectif total (89) est impair, le salaire médian est donc la donnée de rang 45 (valeur arrondie par excès de $89/2 = 44{,}5$), ce qui donne un salaire médian de 1 500 euros.

1,5 point

Le premier quartile est la donnée de rang 23 (valeur arrondie par excès de $89/4 = 22{,}25$), ce qui donne $Q_1 = 1\,300$ euros.

Le troisième quartile est la donnée de rang 67 (valeur arrondie par excès de $(3 \times 89)/4 = 66{,}75$), ce qui donne $Q_3 = 1\,700$ euros.

2.d) salaire moyen

Le calcul du salaire moyen brut noté $\bar{s}$ donne

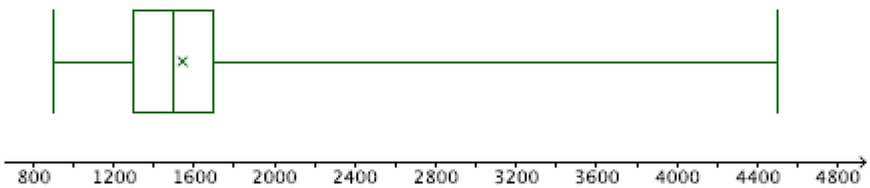
1,5 point

$$\bar{s} = \frac{900 \times 12 + 1\,100 \times 10 + 1\,300 \times 20 + \ldots + 2\,500 \times 5 + 3\,100 \times 2 + 4\,500}{89}$$

$\bar{s} \approx 1\,543$

2.e) question bonus

Le diagramme en boîte de la série des salaires est le suivant :



+1

La croix représente le salaire moyen.